ENSA d'Al-Hoceima | Année 2019/2020
AP-II, 2eme année, | Semestre 2
Probabilité & Statistique, | Devoir Libre

Devoir Libre en probabilité & statistique
à rendre après le confinement et il sera considérer comme le DS1

Exercice 1 *(Jeu d'argent)*

1. Dans une urne Ω, on place 4 pièces de 1 dirhams et 6 pièces de 2 dirhams. On tire simultanément deux de ces pièces. Soit $X : \Omega \to J_X$ une variable aléatoire prenant la valeur de la somme des deux pièces tirées de l'urne.
   (a) Déterminer J_X des valeurs possibles de X. La variable aléatoire X est-elle discrètes ou continues ? **Justifier**
   (b) Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$, la variance $\sigma^2(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X.
2. On suppose qu'on a placé dans Ω, α pièces de 1 dirhams et β pièces de 2 dirhams, le nombre total de pièces étant 10. Comme dans la question 1., on tire simultanément deux de ces pièces ; soit $Y : \Omega \to J_Y$ une variable aléatoire prenant la valeur de la somme des deux pièces tirées de l'urne.
   (a) Déterminer J_Y des valeurs possibles de Y. La variable aléatoire Y est-elle discrètes ou continues ? **Justifier**
   (b) Montrer que l'espérance mathématique $E(Y)$, la variance $\sigma^2(Y)$ et l'écart-type $\sigma(Y)$ de la variable aléatoire Y sont des fonctions de variable α ; représenter graphiquement les variations de ces fonctions.
   (c) Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles on a $6 < E(X) < 9$?

Exercice 2 *(Dépistage d'une maladie)*
On étudie dans ce problème un cas concret de minimiser le coût du dépistage d'une maladie. (La méthode décrite a systématiquement été utilisée par l'armée américaine durant la Seconde Guerre mondiale.)
Le but de cet exercice est de comparer l'efficacité, par rapport au coût, de deux méthodes de dépistage d'une maladie concernant statistiquement 1% de la population, sur un ensemble de 1000 personnes.
On considère que les résultats des tests individuels constituent des événements indépendants.
Dans la **Méthode A**, on effectue 1000 analyses individuelles(Méthode exhaustive).
Dans la **Méthode B**, on répartit 1000 personnes en n groupes de r personnes (donc n r=1000).
Dans chaque groupe, on mélange les r prélèvements pour en faire une seule analyse, ce qui conduit à une première série de n analyses.
- Un groupe est négatif lorsqu'aucun des individus qui le composent n'est malade.
- Sinon, le groupe est positif et l'on procède alors à une nouvelle analyse de sang de chacune des r personne de ce groupe.

1. **Étude de la méthode B**
   (a) i. Quelle est la probabilité p pour qu'un groupe donné soit négatif ?

ii. En déduire la probabilité q pour que ce groupe soit positif.

(b) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de groupes positifs.

i. Montrer que Y suit une loi binomiale de paramètres $(n;q)$.

ii. En déduire l'espérance mathématique $\mathbb{E}(Y)$ de la variable aléatoire Y.

(c) Si Y désigne le nombre de groupes positifs, calculer le nombre d'analyses faites au total avec la méthode B.

(d) On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'analyses effectuées avec la **Méthode B**. Calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ de X.

2. **Comparaison des méthodes A et B**

(a) Montrer que $0.99^r = \left(1 - \frac{1}{100}\right)^r \approx 1 - \frac{r}{100}$.

(b) En remplaçant $0.99^r = \left(1 - \frac{1}{100}\right)^r$ par sa valeur approchée $1 - \frac{r}{100}$, montrer que :

$$\mathbb{E}(X) \approx 10\left(r + \frac{100}{r}\right)$$

(c) Soit la fonction f définie sur $[0;1000]$ par : $f(x) = 10\left(x + \frac{100}{x}\right)$.

i. Dresser le tableau de variations de f.

ii. résoudre l'équation $f(x) = 1000$, puis l'inéquation $f(x) < 1000$.

(d) En déduire les valeurs de r pour lesquelles la **Méthode B** est moins coûteuse que la **méthode A**, ainsi la valeur de r minimisant le coût de la **Méthode B**.

Exercice 3 *(Étude statistique et Loi normale)*

Une chaîne de fabrication produit des pièces circulaires.

A. En sortie de chaîne, on aprélevé un échantillon de 100 pièces, pour lesquelles on a calculé l'écart, en millimètres, entre le rayon idéal et le rayon observé.
Les résultats sont les suivants :

$[-0.9,-0.8[\,:\ 0;\ [-0.8,-0.7[\,:\ 1;\ \ [-0.7,-0.6[\,:\ 4;\ \ [-0.6,-0.5[\,:\ 21;\ \ [-0.5,-0.4[\,:\ 37$

$[-0.4,-0.3[\,:\ 78;\ [-0.3,-0.2[\,:\ 100;\ \ [-0.2,-0.1[\,:\ 123;\ \ [-0.1,0[\,:\ 130;\ \ [0,0.1[\,:\ 127$

$[0.1,0.2[\,:\ 122;\ [0.2,0.3[\,:\ 103;\ \ [0.3,0.4[\,:\ 75;\ \ [0.4,0.5[\,:\ 43;\ \ [0.5,0.6[\,:\ 26$

$[0.6,0.7[\,:\ 7;\ [0.7,0.8[\,:\ 2;\ \ [0.8,0.9[\,:\ 1;\ \ [0.9,1[\,:\ 1;\ \ [1.0,1.1[\,:\ 0$

(a) Tracer l'histogramme de cette série statistique, en prenant pour unités 10cm pour 1mm sur l'axe des abscisses et 1cm^2 pour 10 pièces. quelle est l'aire totale des rectangles ainsi construits ?

(b) Calculer les fréquences et fréquences cumulées correspondant :

i. aux pièces dont l'écart entre le rayon mesuré et le rayon idéal appartient à $[-0.3, 0.3]$.

ii. aux pièces dont l'écart entre le rayon mesuré et le rayon idéal appartient à $[0.6, 1]$.

iii. aux pièces dont l'écart entre le rayon mesuré et le rayon idéal appartient à $[-0.7, -0.5]$.

B. Les conditions de fabrication sont telles que la variable étudiée en **A**. peut être considérée comme continue.
Devant les résultats obtenus, un statisticien propose de modéliser la situation à l'aide d'une loi de probabilité dont la densité f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = 1.33 \exp\left(-\frac{t^2}{0.18}\right)$$

(a) Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire dont la densité f.

(b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

(c) i. Calculer les images par f des réels de -1 à 1 avec le pas 0.1.

ii. Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormal (unité graphique : 10cm).

(d) On admet que l'aire, comprise entre la courbe de f sur $\mathbb{R}$ et l'axe des abscices, est égale à 1.

i. Que représente, en unité d'aire, un carré de côté 1cm sur la figue ?

ii. En déduire des valeurs approchées des probabilités :

$$P([-0.3, 0.3]), \quad P([0.6, 1]) \quad \text{et} \quad P([-0.7, -0.5])$$

iii. Comparer ces résultats à ceux obtenus sur l'échantillon étudié en **A.**

(e) **Commenter et faire une analyse :** l'approximation proposée par la loi de densité f semble-t-elle convenable ou pas ?